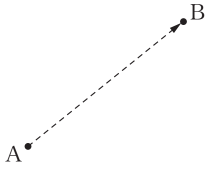
第 39 講　平面ベクトル(1)

【基礎確認事項】

［1］ ベクトルの概念と表記

いままで扱ってきた量は，大きさだけを考えてきた．ところが大きさだけでは表すことのできない量もある．例えば平面上を点が移動するとき，その移動量を表してみよう．



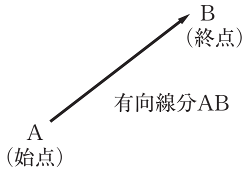
□平面上の A にあった点が同じ平面上の B まで移動する場合を考える．

このとき，途中どのような点を通ったかは問題にせず，とにかく A から B まで移動したという結果だけを考える．

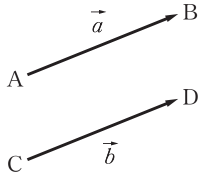
この移動を表すのに，AB の間の距離だけではこの移動を表すことは不可能で，どの方向に移動したかということも必要となってくる．

このように，大きさだけでなく，**大きさと方向**で表す量を**ベクトル**という．これに対し，**大きさだけ**で表すことができる量を**スカラー**という．

例　長さ，面積，体積などは，大きさだけを考える量であるからスカラーである．



□平面上を点が A から B まで移動したことを表すのに，A を始点，B を終点とする有向線分を用いるとよい．これを記号で表すと $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である．または簡単に $\vec{a}$ などと表すこともできる．



□ベクトルは大きさと方向だけを考える量である．よってその位置は問題ではない．したがって，線分 AB と線分 CD が平行で，その大きさと向きが等しければ，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は**等しい**ベクトルであるとみなす．これを　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ や $\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ と表す．

等しいベクトルは，平行移動して重ねあわせることができる．

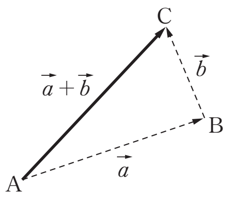
□また，線分 AB の長さを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**大きさ**といい，絶対値記号を用いて $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$ と表す．大きさが 1 のベクトルをとくに**単位ベクトル**という．

⇒ C&U 1

［2］ ベクトルの演算

□ 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**を次のように定義する．

点 A を始点とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$ となる終点 B をとり，さらに点 B を始点として $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ となる終点 C をとる．

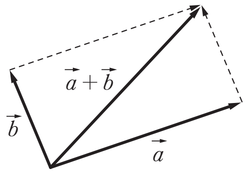


このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{b}$$

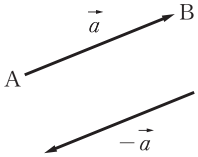
である．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の対角線と考えてもよい．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□$\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{\boldsymbol{a}}$ で表す．すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$　である．



□$\vec{a}+(-\vec{a})$ を計算すれば，その結果は大きさのない点だけということになる．これを**零ベクトル**といい，$\vec{0}$ と表す．

例　$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$ である．

いうまでもなく $|\vec{0}|=0$ であり，また零ベクトルについてはその向きは考えない．

零ベクトルには，次の性質がある．

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$　　　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

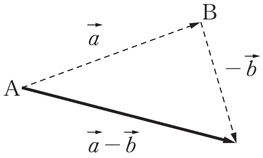
□2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**差**を次のように定義する．

点Aを始点とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$ となる終点Bをとり，さらに点Bを始点として $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\vec{b}$ となる終点Cをとる．

このとき

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$

である．

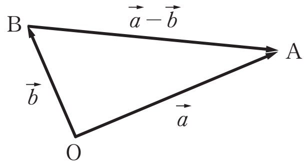


$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差は，次のように定義してもよい．

Oを始点として　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ となるようにA，Bをとると

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

つまり　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}-\vec{b}$　である．



□$\vec{0}$ でない $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}$ の実数倍 $k\vec{a}$ を次のように定義する．

[1]　$k>0$ のとき　　$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

[2]　$k<0$ のとき　　$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

[3]　$k=0$ のとき　　$\vec{0}$

また，$k\vec{0}=\vec{0}$　である．

□したがって，次のことがいえる．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないとき

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a}=k\vec{b}$　となる実数 k が存在する

また，$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは　$\pm\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\pm\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$　と表される．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ベクトルの演算法則をまとめると次のようになる．

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$（交換法則）　　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$（結合法則）
k，l が実数のとき
$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$　　$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

以上の性質により，ベクトルの加法，減法，実数倍の計算では，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ などの式を a，b の式と同じように扱うことができる．

⇒　C&U ２ ３

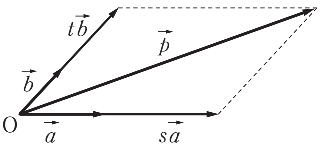
［3］　ベクトルの分解と成分表示

□平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ でないとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は**1次独立**であるという．

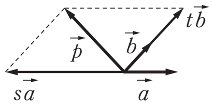
□平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が1次独立であるとき，この平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ および実数 s，t を用いて

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

とただ1通りに表すことができる．
$\vec{p}=\vec{0}$ のときは　$s=0$，$t=0$ である．
　このように，平面上の任意のベクトルは，平行でない2つの方向に分解することができる．



$s>0$，$t>0$



$s<0$，$t>0$

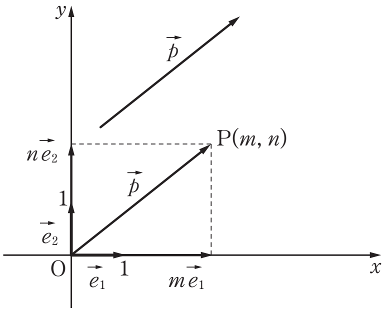
□Oを原点とする座標平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，x 軸方向，y 軸方向の正の向きの単位ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いて表すことができる．

　原点Oを始点とする，$\vec{p}$ に等しいベクトルの終点をPとする．このときの点Pの座標を $(m,\ n)$ とすると，

$$\vec{p}=m\vec{e_1}+n\vec{e_2}\quad\cdots\cdots①$$

である．つまり，$\vec{p}$ が与えられると，①を満たす実数の組 $(m,\ n)$ がただ1つ定まる．逆に，実数の組 $(m,\ n)$ が与えられると，①を満たす $\vec{p}$ がただ1つ定まる．このとき，$\vec{p}$ を

$$\vec{p}=(m,\ n)\quad\cdots\cdots②$$



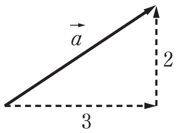
と表す．②における m を $\vec{p}$ の **x 成分**，n を $\vec{p}$ の **y 成分**といい，②を $\vec{p}$ の**成分表示**という．

□x 軸上，y 軸上の単位ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ をとくに基本ベクトルという．基本ベクトルを成分を用いて表すと　$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□成分表示されたベクトルは，x 軸方向，y 軸方向の移動量を表す．
また，成分表示されたベクトルの大きさについて次のことがわかる．

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$



$\vec{a}=(3,2)$
$|\vec{a}|=\sqrt{13}$

成分表示された 2 つのベクトルについて，次のことが成り立つ．

成分表示されたベクトルの相等，和，差，実数倍

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$　のとき

$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1$　かつ　$a_2=b_2$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

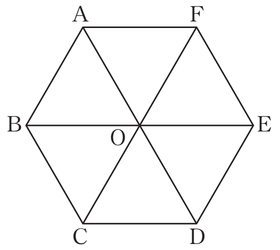
$k\vec{a}=k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　（k は実数）

⇒　C&U 4

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

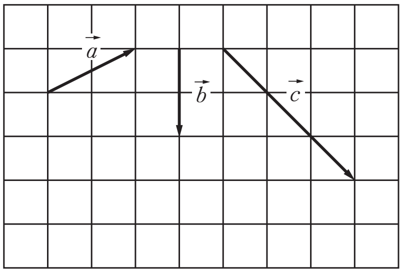
1　右の図は1辺の長さが1の正六角形でその中心をOとする．この図の中で，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ に等しいベクトルをすべて求めよ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ を求めよ．



2　3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が右の図のように与えられているとき，次のベクトルを図示せよ．

(1)　$2\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$2\vec{b}-\vec{c}$

(3)　$2(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}$　　(4)　$-2\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$



3　$\vec{p}=-5\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ のとき，次のベクトルを $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表せ．

(1)　$\vec{a}$　　(2)　$\vec{b}$　　(3)　$-3\vec{a}+4\vec{b}$

4　$\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ．

(1)　$\vec{a}+2\vec{b}$　　(2)　$2\vec{a}-3\vec{b}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　平面ベクトル(1)

1　正六角形ABCDEFにおいて，その中心をO，線分OCの中点をG，線分OEを2：1に内分する点をHとする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$とするとき，ベクトル$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{CH}$，$\overrightarrow{GH}$，$\overrightarrow{BF}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ $\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく．$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{2}$ となるような k の値を求めよ．また，$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ．

(2) $\vec{c}=(5,\ 4)$ を　$x\vec{a}+y\vec{b}$ の形で表せ．

［2］ 3 点 A(1，2)，B(3，5)，C(4，8) について，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を成分で表し，その大きさを求めよ．

(2) D$(x,\ y)$ とする．四角形 ABCD が平行四辺形になるように x，y の値を定めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1) $|\vec{a}|=3$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ.

(2) $\vec{a}=(x,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ -3)$ において, $\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行であるとき, 実数 x の値を求めよ. また, このとき $|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　平面ベクトル(1)

(1)　平行四辺形ABCDにおいて，辺BCを2：1に内分する点をEとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$とすると，$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}=\vec{a}-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}$　である．

(2)　$\vec{a}=(-1,\ 7)$，$\vec{b}=(8,\ -11)$，$\vec{c}=(2,\ 1)$のとき，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$となる実数$m$，$n$は$m=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$n=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$　である．また，$\vec{a}+t\vec{b}$が$\vec{c}$と平行になる実数tの値は$t=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 39 講　平面ベクトル(1)

【CHECK & UP】

1

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathbf{OD}}$，$\overrightarrow{\mathbf{BC}}$，$\overrightarrow{\mathbf{FE}}$

$\overrightarrow{\mathrm{FO}}$ と等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathbf{OC}}$，$\overrightarrow{\mathbf{ED}}$，$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

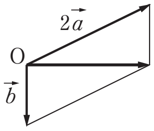
$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ と等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathbf{BO}}$，$\overrightarrow{\mathbf{OE}}$，$\overrightarrow{\mathbf{CD}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=\mathbf{1}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\mathbf{2}$

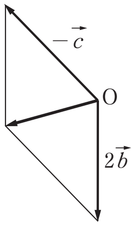
> ベクトルは「大きさ」と「向き」で表される量であることと同時に，ベクトルには「位置の概念がない」ということをまずは把握する必要がある．つまり同じ平面上に，あるベクトルと同じベクトルが無数にあり，また必要に応じて平行移動して無数に作ることができる．
> ベクトルの「大きさ」は，有向線分の長さであるが，ベクトルの長さ，と言わないようにしたい．

2

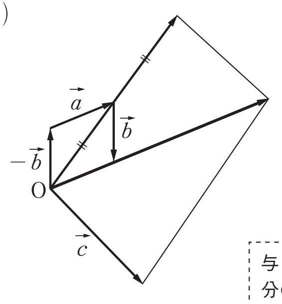
(1)



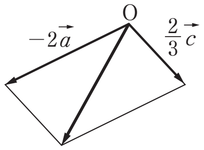
(2)



(3)



(4)



> 与えられたベクトルを図示し，その表す有向線分の大きさと向きを把握する練習である．とくに問題から点や図形が与えられているときは，新たに作ったベクトルがその図形においてどういう意味をもつのかを把握するのに役立つ．

3

$\vec{p}=-5\vec{a}+2\vec{b}$　……①　　　$\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$　……②

(1)　①＋②×2 より　$\vec{a}=\boldsymbol{\vec{p}+2\vec{q}}$

(2)　①×3＋②×5 より　$\vec{b}=\boldsymbol{3\vec{p}+5\vec{q}}$

(3)　$-3\vec{a}+4\vec{b}=-3(\vec{p}+2\vec{q})+4(3\vec{p}+5\vec{q})=\boldsymbol{9\vec{p}+14\vec{q}}$

> ベクトルが加法について閉じていることから，ベクトルの和・差・実数倍は，整式の計算と同じように行うことができる．

4

(1)　$\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ -3)+2(-1,\ 2)=(2,\ -3)+(-2,\ 4)$

$=(2-2,\ -3+4)=\mathbf{(0,\ 1)}$

(2)　$2\vec{a}-3\vec{b}=2(2,\ -3)-3(-1,\ 2)$

$=(4,\ -6)-(-3,\ 6)=\mathbf{(7,\ -12)}$

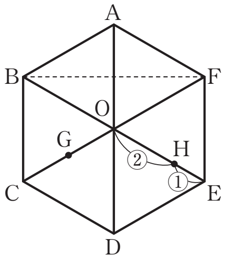
> ベクトルの成分表示は x 軸方向，y 軸方向の「移動量」を表す．和，差，実数倍についても，x 軸方向，y 軸方向それぞれの移動量の和，差，実数倍である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　平面ベクトル(1)

1　正六角形ABCDEFにおいて，その中心をO，線分OCの中点をG，線分OEを2：1に内分する点をHとする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{CH}$，$\overrightarrow{GH}$，$\overrightarrow{BF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}=\vec{a}$　　$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}=\vec{b}$

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\vec{a}+\vec{b})=\boldsymbol{2\vec{a}+2\vec{b}}$　　$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OG}=\boldsymbol{\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}}$

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH}=\boldsymbol{-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}$　　$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}}$

2　[1]　$\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく．$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{2}$ となるような k の値を求めよ．また，$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ．

(2)　$\vec{c}=(5,\ 4)$ を　$x\vec{a}+y\vec{b}$ の形で表せ．

(1)　$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}=(1,\ -1)+k(3,\ 2)=(3k+1,\ 2k-1)$

$|\vec{p}|=\sqrt{(3k+1)^2+(2k-1)^2}=\sqrt{13k^2+2k+2}$

$|\vec{p}|=\sqrt{2}$　より　$13k^2+2k+2=2$　　$13k^2+2k=0$　　$k=\boldsymbol{0,\ -\frac{2}{13}}$

$|\vec{p}|=\sqrt{13\left(k+\frac{1}{13}\right)^2+\frac{25}{13}}$　よって　$k=-\frac{1}{13}$ のとき　$|\vec{p}|$ は最小値　$\sqrt{\frac{25}{13}}=\boldsymbol{\frac{5}{\sqrt{13}}}$ をとる．

(2)　$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$　より　$(5,\ 4)=x(1,\ -1)+y(3,\ 2)=(x+3y,\ -x+2y)$

$x+3y=5,\ -x+2y=4$　　よって　$x=-\frac{2}{5}$，$y=\frac{9}{5}$

よって　$\vec{c}=\boldsymbol{-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{9}{5}\vec{b}}$

2　[2]　3点A(1，2)，B(3，5)，C(4，8)について，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を成分で表し，その大きさを求めよ．

(2)　D$(x,\ y)$とする．四角形ABCDが平行四辺形になるように x，y の値を定めよ．

(1)　$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{(2,\ 3)}$　　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+9}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{(3,\ 6)}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　つまり　$(2,\ 3)=(4-x,\ 8-y)$　であればよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$4-x=2$，$8-y=3$　より　$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=5}$

3　(1)　$|\vec{a}|=3$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ．

(2)　$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ において，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行であるとき，実数 x の値を求めよ．また，このとき $|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ．

(1)　$\vec{a}$ と平行で大きさが 1 のベクトルを $k\vec{a}$ とすると

$|k\vec{a}|=1$　より　$|k|=\dfrac{1}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{3}$　よって　$k=\pm\dfrac{1}{3}$

したがって求めるベクトルは　$\boldsymbol{\pm\dfrac{1}{3}\vec{a}}$

(2)　$\vec{a}+3\vec{b}=(x+6,\ -10)$　　$\vec{a}-\vec{b}=(x-2,\ 2)$

$(\vec{a}+3\vec{b})\parallel(\vec{a}-\vec{b})$ より　$(x+6):(-10)=(x-2):2$

$2(x+6)=-10(x-2)$　　よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3}}$

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき　$\vec{a}+3\vec{b}=\left(\dfrac{20}{3},\ -10\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(-\dfrac{4}{3},\ 2\right)$　よって

$\vec{a}+3\vec{b}=-5(\vec{a}-\vec{b})$　より　$|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|=\boldsymbol{5:1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 39 講　平面ベクトル(1)

(1)　平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 2：1 に内分する点を E とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とすると，$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}=\vec{a}-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}$　である．

(2)　$\vec{a}=(-1,\ 7)$，$\vec{b}=(8,\ -11)$，$\vec{c}=(2,\ 1)$ のとき，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ となる実数 m，n は $m=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$n=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$　である．また，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になる実数 t の値は $t=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．

(1)　$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\mathbf{\dfrac{2}{3}}\vec{b}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\vec{a}-\mathbf{\dfrac{1}{3}}\vec{b}$

【別解】　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\left(\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)-\vec{b}=\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(2)　$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$　より　$(2,\ 1)=m(-1,\ 7)+n(8,\ -11)=(-m+8n,\ 7m-11n)$

よって　$2=-m+8n$，$1=7m-11n$

これらより　$m=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$，$n=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

また，$\vec{a}+t\vec{b}\parallel\vec{c}$　より　$\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$　（k は実数）とおける．

$(-1,\ 7)+t(8,\ -11)=k(2,\ 1)$

$(-1+8t,\ 7-11t)=(2k,\ k)$

よって　$-1+8t=2k$，$7-11t=k$

これらより k を消去して　$t=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。